

传染病 SEIQR 模型在肺结核病防控中的应用

李冬梅, 董在飞, 罗雪峰

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 考虑了潜伏者具有传染力的因素, 建立了一类具有双线性发生率的肺结核 SEIQR 模型, 讨论了无病平衡点及地方病的全局渐近稳定性. 结合我国目前肺结核病发病情况, 应用模型研究的结果, 分析了接种疫苗、隔离措施及模型中相关参数对疾病流行的影响, 提出了预防控制疾病的合理化建议.

关键词: 肺结核 SEIQR 模型; 平衡点稳定性; 接种与隔离; 防控策略

DOI: 10.15938/j.jhust.2015.01.022

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2015)01-0110-07

Application of SEIQR Epidemic Model to the Prevention and Control of Tuberculosis

LI Dong-mei, DONG Zai-fei, LUO Xue-feng

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: A class of SEIQR epidemic model with infectious force is investigated in the latent period and bilinear incidence for tuberculosis. We discuss the global stability of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium. We analyzed the effect of vaccination, quarantine and related parameters on the diseases, by combining with the feature of the tuberculosis and applying the conclusions of this model. We put forward some suggestions on control of disease.

Key words: SEIQR model of tuberculosis; stability of the equilibrium; vaccination and quarantine; the strategy of prevention and control

0 引言

肺结核是常见的一种传染病, 由于发病前具有隐蔽性, 一旦感染此病会对人体造成严重的危害. 若肺结核病染病者如果治疗不及时或不彻底, 可能会不断传染周围人, 造成肺结核病的蔓延. 疾病最有效的控制方法是对染病者进行隔离治疗和对易感者进行预防接种. 中国疾病预防控制中心数据表明: 肺结

核病已成为导致人类死亡最多的传染病之一. 多年来, 有关肺结核病防治问题, 疾病防疫专家及生物数学学者从不同角度对疾病的传染控制给予了多方位的研究, 已取得诸多结果^[1-3].

肺结核病人对具有较强的传染率, 如何减少染病者的有效的接触, 控制疾病的传播, 人们采取了不同的方法, 如, 杜昕等分析了大学生肺结核感染情况与发病特征, 认为加强肺结核防治工作必要性, 积极做好新生肺结核病筛选, 严把新生入学关, 对染病者

收稿日期: 2014-05-25

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(A200502); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12521099).

作者简介: 李冬梅(1962—), 女, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: dmli_2013@126.com;

董在飞(1989—), 男, 硕士研究生;

罗雪峰(1989—), 女, 硕士研究生.

采取隔离措施可有效控制疾病流行^[6,7,8]. 根据流行病学调查数据分析, 结核病可以通过控制传染源, 切断传播途径, 定期检查, 疫苗接种及宣传教育等方式达到逐步减少染病者的人数, 制定有效的结核病防治策略是十分必要的^[9].

根据传染病的传染机理及肺结核传染特征, 应用传染病动力学模型研究疾病传播规律, 有助于制定疾病防控措施. 文^[10,11,12]研究了潜伏者和染病者均具有传染力的 SEIQR 流行病模型, 运用疾病流行与灭绝的阈值, 描述了无病平衡

苗, 有益于对传染疾病控制的作用, 得出对易感者进行接种监控并适当增大隔离点和地方病平衡点的全局稳定性充分条件, 分析对染病者隔离与对易感者接种疫强度, 将有利于疾病的控制与消除, 模型研究的结果揭示了隔离和预防接种对疾病控制的积极促进作用. 目前, 有关这方面的研究已有许多结果, 基本是在理论上给出疾病流行的阈值及最终的趋势限制条件. 很少将研究的结果结合实际发病信息给出预测性的描述.

本文考虑到患有肺结核的潜伏者也具有传染力, 改进了一类具有双线性发生率的肺结核 SEIQR 模型, 分析肺结核病流行与灭绝变化规律, 找到模型的阈值. 根据模型研究结果及目前我国公布肺结核发病相关数据, 分析结核病的隔离及接种对于疾病控制的作用, 以及模型中的相关参数如何影响疾病变化趋势, 为制定疾病的预防和控制措施提供有效的理论依据.

若假设人口常数输入, 考虑肺结核潜伏者、染病者都具有传染力并且按双线性发生率接触易感者, 对易感者进行连续接种, 建立如下模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu S - mS \\ \frac{dE}{dt} &= \beta_1 SI + \beta_2 SE - (\mu + \varepsilon) E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\delta + \mu + d_1 + \gamma) I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (k + \mu + d_2) Q \\ \frac{dR}{dt} &= kQ + \gamma I - \mu R + mS \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, S, E, I, Q, R 分别为关于时间的易感者数量, 肺结核病潜伏者数量, 肺结核病患者数量, 隔离者数量, 免疫者数量; N 表示总人口数, 且 $N = S + E + I + Q + R$; A 表示常数输入量; β_1, β_2 分别表示肺结核潜伏者、患病者的传染率; μ 表示人口平均死亡率; ε

表示潜伏者到发病者的转移率; δ 表示隔离率; d_1 表示染病者因病死亡率; d_2 表示隔离者因病死亡率; γ 表示病人的治愈率; k 表示隔离者在隔离期的治愈率; m 表示对易感者的接种率.

由模型(1)可得

$$\frac{dN}{dt} = A - \mu N - d_1 I - d_2 Q \leq A - \mu N$$

模型(1)的可行域为 $\Omega = \{(S, E, I, Q, R) | 0 \leq S + E + I + Q + R \leq \frac{A}{\mu}\}$, 显然 Ω 是模型(1)的正向不变集.

2 模型性质

模型(1)平衡点满足

$$\left. \begin{aligned} A - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu S - mS &= 0 \\ \beta_1 SI + \beta_2 SE - (\mu + \varepsilon) E &= 0 \\ \varepsilon E - (\delta + \mu + d_1 + \gamma) I &= 0 \\ \delta I - (k + \mu + d_2) Q &= 0 \\ kQ + \gamma I - \mu R + mS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

易求得模型(1)的无病平衡点为 $P_0 = (A/(\mu + m), 0, 0, 0, Am/(\mu(\mu + m)))$.

当 $I \neq 0$ 时, 令

$$R_0 = \frac{A\beta_1\varepsilon + A\beta_2(\mu + \delta + d_1 + \gamma)}{(\mu + m)(\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + d_1 + \gamma)}$$

由式(2)可求得如下关系式

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{A}{(\mu + m)R_0}, I = \frac{\varepsilon(\mu + m)(R_0 - 1)}{\beta_1\varepsilon + \beta_2(\mu + d_1 + \delta + \gamma)} \\ E &= \frac{\mu + d_1 + \delta + \gamma}{\varepsilon} I, Q = \frac{\delta}{k + \mu + d_2} I \\ R &= (mS + \gamma I + kQ) \cdot \frac{1}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

定理1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(1)仅存在无病平衡点 P_0 ; 当 $R_0 > 1$ 时, 除存在无病平衡点 P_0 外, 模型(1)还存在唯一地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$, P^* 由式(3)确定.

定理2 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(1)无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点是不稳定的.

证明模型(1)在无病平衡点 P_0 处的雅克比矩阵所对应特征方程为

$$(\lambda + \mu) [\lambda + (k + d_2 + \mu)] [\lambda + (\mu + m)] \left\{ \lambda^2 + \left[\frac{A\beta_2}{\mu + m} + 2\mu + \varepsilon + \delta + d_1 + \gamma \right] \lambda + \right.$$

$$(\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + d_1 + \gamma)(1 - R_0) = 0 \quad (4)$$

显然 $R_0 < 1$ 时,由二次型性质可知,方程(4)特征根均为负值,则模型(1)的无病平衡点是局部渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点是不稳定的,证毕.

由于模型(1)的前三个方程与 Q, R 无关,所以只需考虑模型(1)对应的子系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu S - mS \\ \frac{dE}{dt} &= \beta_1 SI + \beta_2 SE - (\mu + \varepsilon)E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\delta + \mu + d_1 + \gamma)I \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

模型(5)的可行域为 $\Omega' = \{(S, E, I) | 0 \leq S + E + I \leq A/\mu\}$, Ω' 是模型(5)的正向不变集.

定理3 当 $R_0 \leq 1$ 时,那么模型(5)的无病平衡点 $P_0(A/(\mu+m), 0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证明 取 Liapunov 函数 $V = \varepsilon E + (\mu + \varepsilon)I$, 它沿着模型(5)求导数

$$\begin{aligned} V' &= \varepsilon E' + (\mu + \varepsilon)I' = \varepsilon [\beta_1 SI + \beta_2 SE - (\mu + \varepsilon)E] + \\ &(\mu + \varepsilon) [\varepsilon E - (\mu + d_1 + \delta + \gamma)I] = \\ &\varepsilon \beta_1 SI + \varepsilon \beta_2 SE - (\mu + \varepsilon)(\mu + d_1 + \delta + \gamma)I \leq \\ &\left[\frac{A\beta_1 \varepsilon}{\mu + m} + \frac{A\beta_2(\mu + d_1 + \delta + \gamma)}{\mu + m} - \right. \\ &(\mu + \varepsilon)(\mu + d_1 + \delta + \gamma)] I = \\ &(\mu + \varepsilon)(\mu + d_1 + \delta + \gamma)(R_0 - 1)I \end{aligned}$$

当 $I=0$ 或者 $R_0=1$ 时, $V'=0$; 当 $R_0 < 1$ 时, $V' < 0$. 由 Liapunov 稳定性定理可知, P_0 是模型(5)的全局渐近稳定点. 证毕.

考虑微分方程

$$x' = f(x), x \in D \quad (6)$$

设 $x(t, x_0)$ 是方程(6)满足初始值 $x(0, x_0) = x_0$ 的解. 给出两个假设:

(H₁) 存在一个紧吸引子集 $K \subset D$;

(H₂) 方程(6)有唯一的平衡点 $x \in D$.

设 $x \rightarrow P(x)$ 是一个 $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ 矩阵函数, 当 $x \in D$

时, $P(x) \in C^1$. 假设 $P^{-1}(x)$ 存在且在 $x \in K$ 时是连续的, K 是一个紧的吸引集. 定义

$$q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(x(s, x_0))) ds$$

其中 $B = P_f P^{-1} + P \frac{\partial f}{\partial x} P^{-1}$. 矩阵 P_f 是 $P(x)$ 沿 f 方向的方向导数, $\mu(B)$ 是矩阵 Lozinskii 测度, $\mu(B) =$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|1 + hB| - 1}{h}.$$

引理1^[3] 假设 D 是单连通的且满足 (H₁) 和 (H₂) 成立. 如果 $q < 0$, 那么模型(1)的唯一平衡点是全局稳定的.

定理4 当 $R_0 > 1$ 时,模型(5)是一致持久的.

证明 因为 Ω' 是模型(5)的正向不变集,在 Ω' 的边界 $\partial\Omega'$ 上总存在唯一的无病平衡点 P_0 . 由定理2知,当 $R_0 > 1$ 时, P_0 不稳定. 从而 P_0 成为 $\partial\Omega'$ 上唯一最大不变集 $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{P_0\}$, 所以 $W^+(N_\alpha) \cap \{\Omega' : x \in \Omega', d(x, \Omega') \leq \varepsilon\} = \emptyset$, 由 [3] 引理 3.6.3 知模型(5)是一致持久的. 证毕.

定理5 如果 $R_0 > 1$, 且 $2A\beta_2 < \mu(\mu + \varepsilon)$ 时,模型(5)的正平衡点 (S^*, E^*, I^*) 是全局渐近稳定的.

证明 模型(5)的雅克比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 I - \beta_2 E - (\mu + m) & -\beta_2 S & -\beta_1 S \\ \beta_1 I + \beta_2 E & \beta_2 S - (\mu + \varepsilon) & \beta_1 S \\ 0 & \varepsilon & -n \end{pmatrix}$$

其中 $n = \mu + d_1 + \delta + \gamma$.

矩阵 J 所对应的第二加法复合矩阵为

$$J^{\oplus} = \begin{pmatrix} \beta_2 S - \beta_1 I - \beta_2 E - (\mu + \varepsilon + \mu + m) & \beta_1 S & \beta_1 S \\ \varepsilon & -\beta_1 I - \beta_2 E - (\mu + m + n) & -\beta_2 S \\ 0 & \beta_1 I + \beta_2 E & \beta_2 S - (\mu + \varepsilon + n) \end{pmatrix}$$

取 $P(x) = P(S, E, I) = \text{diag}\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right)$, 那么 P_f

$$P^{-1} = \text{diag}\left\{0, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right\}.$$

矩阵 $B = P_f P^{-1} + P J^{\oplus} P^{-1}$ 可以写成分块矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $B_{11} = \beta_2 S - \beta_1 I - \beta_2 E - (2\mu + m + \varepsilon)$, $B_{12} =$

$$\left[\frac{\beta_1 SI}{E}, \frac{\beta_1 SI}{E} \right], B_{21} = \left[\frac{\varepsilon E}{I}, 0 \right]^T$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \beta_1 I - \beta_2 E - (\mu + m + n) & -\beta_2 S \\ \beta_1 I + \beta_2 E & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \beta_2 S - (\mu + \varepsilon + n) \end{pmatrix} \quad (7)$$

利用估值方法求得 $\mu(B) \leq \sup\{g_1, g_2\}$

其中 $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|$, $g_2 = |B_{21}| + \mu_1(B_{22})$, $|B_{12}|$, $|B_{21}|$ 是关于 l_1 向量范数的矩阵范数, μ_1 是关于 l_1 范数的 Lozinskii 测度.

由式(7)可得

$$\mu_1(B_{11}) = \beta_2 S - \beta_1 I - \beta_2 E - (2\mu + m + \varepsilon),$$

$$|B_{12}| = \frac{\beta_1 SI}{E}, |B_{21}| = \frac{\varepsilon E}{I}$$

$$g_1 = -\beta_1 I - \beta_2 E - (\mu + m) + \beta_2 S - (\mu + \varepsilon) + \frac{I}{E} \beta_1 S \quad (8)$$

把 B_{22} 的每一列的非对角矩阵取绝对值, 然后加到相应的对角元素上得

$$B'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \mu - m - n & -\beta_2 S \\ \beta_1 I + \beta_2 E & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + 2\beta_2 S - (\mu + \varepsilon + n) \end{bmatrix}$$

取 B'_{22} 的两个对角元素的最大值得 $\mu(B_{22})$, 则

$$\mu(B_{22}) = \max \left\{ \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \mu - m - n, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + 2\beta_2 S - \mu - \varepsilon - n \right\}$$

$$g_2 = \sup \{ g'_2, g''_2 \}$$

其中

$$g'_2 = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + 2\beta_2 S - (\mu + \varepsilon) - n + \frac{\varepsilon E}{I}$$

$$g''_2 = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (\mu + m) - n + \frac{\varepsilon E}{I} \quad (9)$$

再由模型(5)后两个方程可得

$$\begin{cases} \frac{\beta_1 SI}{E} = \frac{E'}{E} - \beta_2 S + (\mu + \varepsilon) \\ \frac{\varepsilon E}{I} = \frac{I'}{I} + n \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)可得

$$g'_2 = \frac{E'}{E} + 2\beta_2 S - \mu - \varepsilon$$

$$g''_2 = \frac{E'}{E} - \mu - m \quad (11)$$

当 $2A\beta_2 < \mu(\mu + \varepsilon)$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t g'_2(t) dt \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \left(\frac{E'}{E} + 2\beta_2 S - \mu - \varepsilon \right) dt \leq$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(T)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2A\beta_2}{\mu} - \mu - \varepsilon \right) \frac{t - T}{t} < 0$$

而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t g_1(t) dt \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \left(\frac{E'}{E} + \frac{S'}{S} - \frac{A}{S} \right) dt \leq$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\ln \frac{E(t)}{E(T)} + \ln \frac{S(t)}{S(T)} \right] - \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \frac{t - T}{t} < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t g''_2(t) dt \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t \left(\frac{E'}{E} - \mu - m \right) dt \leq$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(T)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (\mu + m) \frac{t - T}{t} < 0$$

可得到 $q = \sup \{ g_1(t), g'_2(t), g''_2(t) \} < 0$, 由引理 1 可得模型(5)的地方病平衡点全局渐近稳定. 证毕.

定理 6 如果 $R_0 > 1$, 那么地方病平衡点 $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ 在区域 Ω 内是模型(1)的全局渐近稳定点.

证明 由定理 5 可知, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $(S, E, I) \rightarrow (S^*, E^*, I^*)$, 由模型(1)的后两个方程可得(1)的极限系统

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \delta I^* - (k + d_2 + \mu) Q \\ \frac{dR}{dt} = m S^* + \gamma I^* + k Q - \mu R \end{cases}$$

易得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $Q(t) \rightarrow Q^*, R(t) \rightarrow R^*$, 模型(1)的地方病平衡点是全局渐近稳定的. 证毕.

3 数值模拟

取模型(5)中参数 $A = 0.1, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.4, m = 0.1, \mu = 0.1, \varepsilon = 0.8, d_1 = 0.01, \delta = 0.1, \gamma = 0.6, k = 0.2, d_2 = 0.005$, 并取初始值为 $(1.0, 0.5, 0.3)$. 经过计算, 得到 $P_0 = (0.5, 0, 0), R_0 = 0.350 < 1$. 由定理 3 知模型(5)无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的, 模拟图如图 1. 若取 $m = 0.01, \gamma = 0.1$, 其他参数取值不变的情况下, 满足 $2A\beta_2 < \mu(\mu + \varepsilon), R_0 = 1.129 > 1, P^* = (0.805, 0.031, 0.012)$. 由定理 5 知, P^* 是全局稳定的, 模拟如图 2.

通过对比图 1 和图 2 可以得到, 当增大接种率 m 及治愈率 γ 时, $R_0 < 1$, 疾病不流行; 当降低接种率 m 及治愈率 γ 时, $R_0 > 1$, 但通过调节治疗强度 γ 也可以控制患者维持在一个较低的水平, 使疾病趋于较小的稳定值.

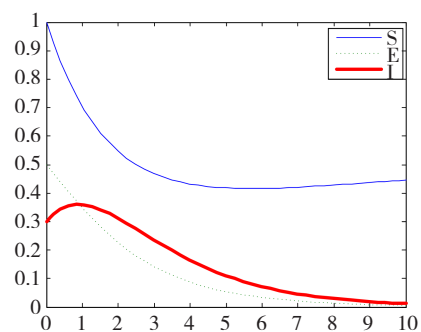
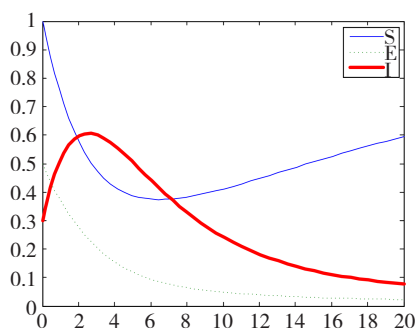


图 1 无病平衡点 P_0 全局稳定模拟图

图2 地方病平衡点 P^* 全局稳定模拟图

4 模型应用

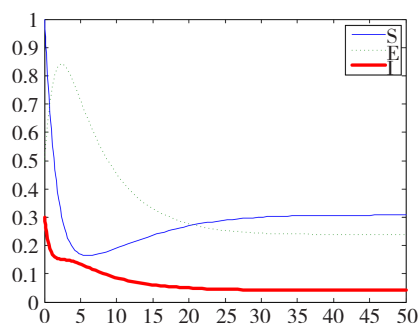
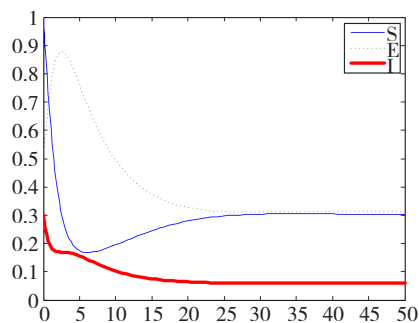
结核病患者及其潜伏者均具有较强的传染力,一旦疾病蔓延,会严重地威胁着人类健康和社会发展,因此,结核病防控是人类社会面临的公共卫生问题.我国是全球22个结核病高负担国家之一,世界卫生组织评估,目前我国结核病发病人数占全球的16%,位居全球第二位.我国十分重视结核病的防治工作,根据2000年全国调查结果,全国肺结核病人150万,约有13万人死于肺结核^[4].2005年底我国的结核病患者发现率为79%,患者的治愈率为91%.2006年下发了《全国结核病防治规划》,提出了到2010年的阶段目标:医疗机构参与防治工作要达100%,全民结核病防治知识知晓率达80%^[5].目前许多人对结核病基本防治知识知晓率低,免疫接种不及时,移民或人口流动都会对结核病的传播都会产生影响.特别是大学生学习和生活集中,学习负担重,易造成肺结核病的传播.由此高校应根据疫情,积极做好预防,避免疾病流行.

肺结核病主要是通过空气传播,通过改变环境卫生,可以降低接触率,对染病者隔离,对健康者做好接种,提高医疗水平增加治愈率,可以有效的控制疫情,因此,实施综合预防会降低发病率.由此通过改变参数 $\beta_1, \beta_2, m, \delta$ 在不同范围取值,借助模型(5)的解的变化规律,了解疾病的变化趋势.由文[2]中所给数据可以估算出死亡率0.08,文[5]认为没有及时发现的都转化为患病者,可得转移率约为0.2,而发现的人群中治愈率较高,故可得疾病的平均治疗率约为0.75.从而取模型(3)中参数 $A = 0.1, \mu = 0.011, d_1 = 0.08, \gamma = 0.75, \varepsilon = 0.2$.下面针对不同情况的隔离率和接种率,参数 $\beta_1, \beta_2, m, \delta$ 取值范围参看表1,在满足地方病平衡点 P^* 全局稳定($R_0 > 1$)条件下,讨论疾病发展趋势.并取初值为

(1.0, 0.5, 0.3), 绘出各种情况下地方病平衡点性态图,如图3至图8.

表1 参数 $\beta_1, \beta_2, m, \delta$ 对疾病的影响

m, δ	β_1, β_2	平衡点 P^*	模拟图	病人数量变化
$m = 0.15$ $\delta = 0.3$	$\beta_1 = 0.5$ $\beta_2 = 0.6$	(0.31, 0.24, 0.04)	如图3	逐渐增大接触率,患病者的数量不断增加
	$\beta_1 = 0.5$ $\beta_2 = 0.8$	(0.24, 0.29, 0.05)	如图5	
	$\beta_1 = 0.6$ $\beta_2 = 0.8$	(0.23, 0.31, 0.06)	如图7	
	$\beta_1 = 0.5$ $\beta_2 = 0.6$	(0.30, 0.31, 0.06)	如图4	当接触率相同时,降低接触率以及接种率,患病者数量增加
	$\beta_1 = 0.5$ $\beta_2 = 0.8$	(0.24, 0.35, 0.07)	如图5	
	$\beta_1 = 0.6$ $\beta_2 = 0.8$	(0.23, 0.42, 0.08)	如图6	

图3 当 $m = 0.15, \delta = 0.3, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.6$ 时图4 当 $m = 0.1, \delta = 0.2, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.6$ 时

通过对比图3和5(或4和6)可得:当接触率 β_2 增大时,患病者数量增加;对比图5和7(或6和8)可得:当接触率 β_1 增大时,患者数量同样会有略微增加.综上所述:为防止疾病的蔓延,应降低接触率 β_2 ,尽量减少到人群密集的地区;降低接触率 β_1 ,对检测出的患者加强隔离,减少接触患者的机会,避免疾病传播.

对比图3和图4可得:降低接种率和隔离率,基

本再生数增大,患病者的数量增加. 为了更好的控制疾病,应尽量加大接种和隔离力度. 而在肺结核疾病控制中,有关公共的隔离措施很难掌握,通过加大疫苗接种可以减缓疾病的蔓延,直至消灭疾病,调整参数如表 2,满足 $R_0 \leq 1$.

表 2 隔离 δ 对于肺结核的影响

参数取值	隔离率 δ	接种率 m
$\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.6$	0.3	≥ 0.314
$A = 0.1, \mu = 0.011$	0.2	≥ 0.319
$\gamma = 0.75, \varepsilon = 0.2$	0.01	≥ 0.330

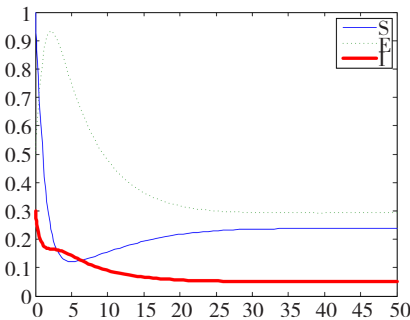


图 5 当 $m = 0.15, \delta = 0.3, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.8$ 时

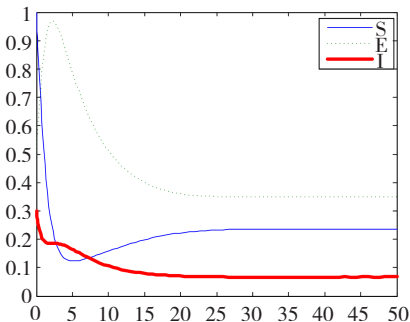


图 6 当 $m = 0.1, \delta = 0.2, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.8$ 时

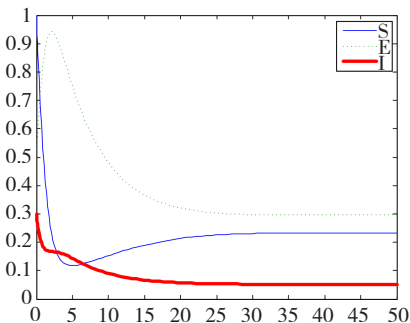


图 7 当 $m = 0.15, \delta = 0.3, \beta_1 = 0.6, \beta_2 = 0.8$ 时

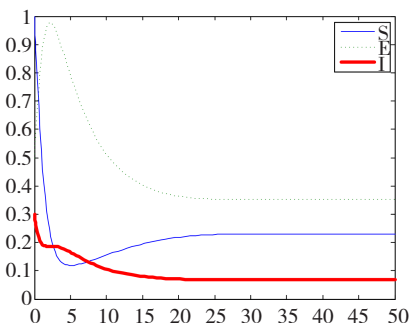


图 8 当 $m = 0.1, \delta = 0.2, \beta_1 = 0.6, \beta_2 = 0.8$ 时

从表 2 可得: 当隔离率 $\delta = 0.3$, 只要接种率高于 0.314, 就可防治疾病发生; 当隔离率 $\delta = 0.2$, 只要接种率高于 0.319, 也可避免疾病的发生; 由于肺结核并不涉及公共隔离措施, 所以隔离率比较低, 一般都是个人的防控, 所以再次选取 $\delta = 0.01$, 通过计算可知: 只要接种率 $m > 0.33$, 就可避免疾病的流行. 对比三种情况可知: 隔离率较低并不会对疾病的传播起决定性作用, 应侧重的把控接种率. 所以现实中所谓的肺结核隔离, 主要指的是自身的控制, 减少出入公共场所. 在注重自身防控的同时, 提高治愈率以及接种率, 可以控制疾病的发生.

5 疾病防控策略

肺结核病可以由多个途径传播, 实施综合防控措施可以减低疾病的发生.

- 1) 由于潜伏者的存在, 使得疾病的控制有一定的难度, 为此应尽量避免到公共场所, 减少被感染的机会;
- 2) 加强预诊, 做好疫情报告, 降低由潜伏者向患病者的转移率;
- 3) 对于检测出的患病者及时隔离, 避免疾病的蔓延; 对于传染性病人, 提供合格的抗结核药物以及相应的医疗条件, 提高病人的治愈率; 同时加大对人群的接种率;
- 4) 展开疾病的宣传与健康教育, 动员患者和社会力量, 提高结核病防治知识水平; 加强结核病控制工作的研究.

防治结核病是一项社会性很强的工作, 它不仅需要有效的抗结核药物和控制措施, 而且还需要社会的积极参与.

参考文献:

[1] RUAN shigui, WANG wendi. Dynamical Behavior of an Epidemic Model with a Nonlinear Incidence Rate [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 188(1): 135 - 163.

[2] DAVID J Gerberry, FABIO A Milner. An SEIQR Model for Children Diseases [J]. Journal of Mathematical Biology, 2009, 59: 535 - 561.

- [6] 孟新友, 向红, 朱毓杰, 等. 一类手足口病 SEIQR 传染病模型的稳定性分析 [J]. 兰州大学学报, 2012, 24(2): 42-46.
- [7] 林伟. 一类总人口数不变的肺结核模型的正平衡点的全局稳定性 [J]. 医药医学研究与健康, 2012, 6: 250.
- [8] BIMAL Kumar Mishra, NAVNIT Jha. SEIQRS Model for the Transmission of Malicious Objects in Computer Network [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(3): 710-715.
- [9] 杜昕, 陈伟, 黄飞, 等. 2004~2008 年全国学生肺结核报告发病特征分析 [J]. 中国健康教育, 2009, 25(11): 803-810.
- [10] 杜玉春, 刘伟江, 刘柏辉. 大学生肺结核发病情况的回顾调查 [J]. 赣南医学院学报, 2008, 28(1): 101-103.
- [11] 温毅, 张瑞萍, 张延林, 等. 高校新生肺结核筛选及防控措施的制定 [J]. 中国中西医结合影像学杂志, 2007, 5(4): 312.
- [12] 程红群. 结核病的流行趋势与防控策略 [J]. 中华护理杂志, 2007, 42(7): 670-672.
- [13] 徐翠翠, 赫孝良. 一类具有潜伏期和隔离项的 SEIQR 流行病模型 [J]. 商丘师范学院学报, 2010, 26(6): 43-49.
- [14] 马艳丽, 徐文雄, 王春生. 具有预防接种和隔离措施的 SEIQR 传染病模型 [J]. 西安工程大学学报, 2011, 25(1): 90-94.
- [15] 章培军, 李维德, 李自珍, 等. 具有连续预防接种的双线性接触率的 SEIQR 流行病模型的定性分析 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2009, 45(4): 118-120.
- [16] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科技出版社, 2004: 147-163, 178.
- [17] 刘剑军, 姜世闻, 成诗明. 中国肺结核控制现状分析及对策 [J]. 中国防痨杂志, 2003, 25(3): 129-131.
- [18] 王陇德. 中国结核病控制现状及展望 [J]. 中华结核和呼吸杂志, 2006, 29(8): 505-506.
- [19] 胡立新, 周义仓. 具有潜伏和隔离的传染病模型的全局分析 [J]. 生物数学学报, 2009, 24(3): 461-469.
- [20] 芦雪娟, 张敬, 董晓红. 具有非线性传染率的 SEIQR 流行病模型的全局稳定性 [J]. 生物数学学报, 2012, 27(1): 136-144.
- [21] 董淑转. 一类带有隔离和接种的传染病模型的稳定性分析 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(20): 175-178.
- [22] 陈中祥. 一类潜伏期与传染期均传染的传染病模型 [J]. 数学理论与应用, 2010, 30(2): 23-29.
- [23] YANG JUNYUAN, CHEN YUMING, ZHANG FENGQIN. Stability Analysis and Optimal Control of a hand-foot-mouth Disease (HFMD) Model [J]. J Appl. Math. Comput, 2013, 41: 99-117.

(编辑: 王 萍)